ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1984

****

TA

MATHEMATIQUES II

(2 pages dactylographiées)

Dans tout le problème, $\mathcal{E}_o$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0 ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; les coordonnées sur ce repère seront notées (x, y, z) ; $\mathcal{P}$ est la surface d'équation xy = z ; Π est le plan d'équation z = 0. Dans les parties II et III, la variable t désigne le temps et décrit $\mathbb{R}$ tout entier. La partie III peut être étudiée indépendamment des précédentes.

PREMIERE PARTIE

Soit θ un nombre réel fixé et M le point de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

L'objet de cette partie est de montrer qu'il existe quatre points A, B, C, D appartenant à $\mathcal{P}$ tels que ABCD soit un carré de côté $2\sqrt{2}$ et de centre M.

Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{K}$ les vecteurs définis par :

$$\vec{K} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j} + \vec{k}) \quad ; \quad \vec{U} = \cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{V} = \vec{K} \wedge \vec{U}$$

1. Soit φ un nombre réel et $\vec{I}$ le vecteur défini par :

$$\vec{I} = \cos\varphi\,\vec{U} + \sin\varphi\,\vec{V}.$$

a) Calculer les composantes de ce vecteur sur $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

b) Montrer que la condition :

$$(1) \quad \sin 2\theta \cos 2\varphi - k \cos 2\theta \sin 2\varphi = 0$$

où k désigne la constante $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, est nécessaire et suffisante pour que le point N, défini par $\overrightarrow{MN} = 2\vec{I}$, appartienne à $\mathcal{P}$.

2. θ étant fixé, la relation (1) de IIb devient une équation en φ. Montrer qu'il existe un réel φ_o tel que cette équation admette les quatre solutions :

$$\varphi_o, \quad \varphi_o + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_o + \pi, \quad \varphi_o + \frac{3\pi}{2}.$$

Conclure.

3. On pose toujours $k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

a) Montrer qu'il existe une et une seule fonction Φ, définie et continue sur $\mathbb{R}$, telle que $\Phi(0) = 0$, et vérifiant, pour tout x tel que cotg 2x existe, la relation

$$\text{cotg}\,(2\,\Phi(x)) = k\,\text{cotg}\,2x.$$

Pour tout m appartenant à $\mathbb{Z}$, on explicitera $\Phi(x)$, à l'aide de fonctions usuelles, lorsque x décrit l'intervalle $]m\frac{\pi}{2}, (m+1)\frac{\pi}{2}[$, et l'on précisera $\Phi(m\frac{\pi}{2})$.

Montrer que la fonction Ψ, définie par $\Psi(x) = \Phi(x) - x$, est périodique.

Montrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\Phi'(x)$.

b) Préciser l'intervalle décrit par $\Phi'(x)$ quand x décrit $\mathbb{R}$. Construire la courbe représentative de Φ en précisant sa concavité.

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|\Phi(x) - x| < 0{,}015$.

DEUXIEME PARTIE

Dans toute cette partie, on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, t désignant le temps :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$$

$$\vec{K}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{U}(t) = \cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{K}(t) \wedge \vec{U}(t)$$

.../..

$$\vec{I}(t) = \cos\Phi(t)\ \vec{U}(t) + \sin\Phi(t)\ \vec{V}(t)$$

$$\vec{J}(t) = \vec{K}(t) \wedge \vec{I}(t)$$

la fonction Φ étant celle définie en I 5°.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien lié au repère $(M ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dont la position par rapport à $\mathcal{E}_o$ à chaque instant t est le repère $(M(t) ; \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$.

On se propose l'étude de quelques propriétés du mouvement de $\mathcal{E}$ par rapport à $\mathcal{E}_o$.

1° Montrer qu'il existe un carré ABCD lié à $\mathcal{E}$, de centre M et de côté $2\sqrt{2}$, tel que les quatre points A(t), B(t), C(t), D(t) positions de A, B, C, D dans $\mathcal{E}_o$, restent constamment sur $\mathcal{S}$.

2° Soit $\mathcal{L}$ la droite $(M, \vec{K})$ de $\mathcal{E}$. Montrer que les points de $\mathcal{L}$ ont des trajectoires planes et en préciser la nature.

3° Montrer qu'à chaque instant t le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}(t)$ du mouvement est une combinaison linéaire de $\vec{k}$ et $\vec{K}(t)$, dont on précisera les coefficients.

4° a) Soit $\mathcal{C}(t)$ la position à l'instant t du plan du carré ABCD et $\Delta(t)$ son intersection avec Π. Ecrire une équation cartésienne de $\Delta(t)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que, parmi les points de $\mathcal{E}$ qui sont sur $\Delta(t)$ à l'instant t, il en existe un et un seul dont le vecteur vitesse à cet instant soit parallèle à $\mathcal{C}(t)$. Quelles sont les coordonnées dans $(O ; \vec{I}, \vec{J})$ de la position Q (t) de ce point de $\mathcal{E}$?

c) Quand t décrit $\mathbb{R}$, Q (t) décrit une courbe du plan Π ; la construire. Montrer que $\Delta(t)$ est la tangente en Q (t) à cette courbe. La définition de Q (t) permettait-elle de prévoir ce résultat ?

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, on étudie une approximation du mouvement de $\mathcal{E}$ vu dans II, fondée sur l'idée (dégagée à la fin de I) que $\Phi(t)$ est "peu différent" de t.

On suppose que les coordonnées de M (t) sur $\mathcal{R}$ sont, ici encore, (cost, sint, 0). On introduit les vecteurs suivants :

$\vec{K}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin t\ \vec{I} - \cos t\ \vec{j} + \vec{k})$; $\vec{U}(t) = \cos t\ \vec{i} - \sin t\ \vec{j}$; $\vec{V}(t) = \vec{K}(t) \wedge \vec{U}(t)$;

$\vec{I}_1(t) = \cos t\ \vec{U}(t) + \sin t\ \vec{V}(t)$; $\vec{J}_1(t) = \vec{K}(t) \wedge \vec{I}_1(t)$ et on étudie le mouvement par rapport à $\mathcal{E}_o$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}_1$ lié au repère $(M(t); \vec{I}_1(t), \vec{J}_1(t), \vec{K}(t))$.

1° Calculer les composantes sur $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_1(t)$ de ce mouvement à l'instant t.

2° Montrer qu'il existe à tout instant t un axe instantané de rotation-glissement d(t). Donner de d(t) une représentation paramétrique dans $\mathcal{R}$.

3° d(t) rencontre le plan défini dans $\mathcal{R}$ par l'équation y = x en un point S(t), unique si sin t ≠ cos t. Montrer que, quand t varie, S(t) décrit, relativement à $\mathcal{E}_o$, un arc de parabole dont on précisera l'axe et la tangente au sommet.

4° Soit A_1, B_1, C_1, D_1 les points de $\mathcal{E}_1$ dont les positions $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$, $D_1(t)$ à tout instant t vérifient :

$$\overrightarrow{MA_1}(t) = -\overrightarrow{MC_1}(t) = 2\vec{I}_1(t)\ ;\ \overrightarrow{MB_1}(t) = -\overrightarrow{MD_1}(t) = 2\vec{J}_1(t).$$

Construire la projection orthogonale sur Π de la trajectoire de A_1. Comment s'en déduisent les projections orthogonales sur Π des trajectoires de B_1, C_1, D_1 ?

5° Pour préciser l'approximation faite dans cette étude, on demande de calculer à 10^{-3} près la plus grande valeur de :

$|x_1(t) \cdot y_1(t) - z_1(t)|$, où $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ désignent les coordonnées de $A_1(t)$ dans $\mathcal{R}$.